IMPORTANTE: ESTA SOLUCIÓN NO REPRESENTA, EN LO ABSOLUTO, UNA CLAVE DE CORRECCIÓN DEL PARCIAL. EL PROFESOR DECIDIRÁ, HACIENDO USO DE SUS ATRIBUCIONES, SI HACE FALTA, O NO, ALGUNA EXPLICACIÓN O METODOLOGÍA ADICIONAL QUE SUSTENTE SUS RESPUESTAS.

PRIMER PARCIAL DE MATEMÁTICAS V

Bloque A. Octubre 2014

1. Sea $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la función definida por:

$$\boldsymbol{f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^4+y^4}{x^2+y^2} + x, & si\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & si\ (x,y) = (0,0) \end{cases}}$$

a. Halle las derivadas parciales de f en $(0,0)$

b. Halle la derivada direccional de f, en el origen, en la dirección del vector $\vec{v} = \left(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right)$

c. Determine, justificando, si f es diferenciable en $(0,0)$

Solución:

a. Derivadas parciales:

Luego de argumentar sobre la existencia de las derivadas, procedemos a aplicar la definición conocida:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x},\bar{y}) = \lim_{h\to 0}\frac{f(\bar{x}+h,\bar{y}) - f(\bar{x},\bar{y})}{h} \to \frac{\partial f}{\partial x}(0{,}0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(0+h,0) - f(0{,}0)}{h}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0{,}0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(0+h,0) - f(0{,}0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{h^4}{h^2} + h - 0}{h} = \lim_{h\to 0}\left(\frac{h^4}{h^3} + \frac{h}{h}\right) = 1 \to \frac{\partial f}{\partial x}(0{,}0) = 1$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(\bar{x},\bar{y}) = \lim_{h\to 0}\frac{f(\bar{x},\bar{y}+h) - f(\bar{x},\bar{y})}{h} \to \frac{\partial f}{\partial y}(0{,}0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(0{,}0+h) - f(0{,}0)}{h}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(0,0+h)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{h^4}{h^2}-0}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h^4}{h^3} = 0 \to \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$$

Entonces, concluimos que:

$$\nabla f(0,0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

b. Derivada direccional:

Luego de argumentar sobre la existencia de la derivada direccional, tenemos que verificar que el vector $\vec{v}$ sea unitario. Tenemos:

$$\vec{v} = \left(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right) \to |\vec{v}| = 1$$

Aplicamos la definición:

La derivada direccional d está dada por:

$$d = \lim_{t\to 0}\frac{f(\bar{x}+tv_x, \bar{y}+tv_y) - f(\bar{x},\bar{y})}{t} \to d = \lim_{t\to 0}\frac{f\left(0+t\frac{3}{5}, 0+t\left(-\frac{4}{5}\right)\right) - f(0,0)}{t}$$

$$d = \lim_{t\to 0}\frac{f\left(0+t\frac{3}{5}, 0+t\left(-\frac{4}{5}\right)\right) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{\frac{\left(\frac{3}{5}t\right)^4 + \left(-\frac{4}{5}t\right)^4}{\left(\frac{3}{5}t\right)^2 + \left(-\frac{4}{5}t\right)^2} + \left(\frac{3}{5}t\right) - 0}{t}$$

$$= \lim_{t\to 0}\frac{\left(\frac{3}{5}t\right)^4 + \left(-\frac{4}{5}t\right)^4}{t\left(\left(\frac{3}{5}t\right)^2 + \left(-\frac{4}{5}t\right)^2\right)} + \frac{\left(\frac{3}{5}t\right)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{t^4\left(\left(\frac{3}{5}\right)^4 + \left(-\frac{4}{5}\right)^4\right)}{t^3\left(\left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(-\frac{4}{5}\right)^2\right)} + \frac{3}{5}$$

$$= \lim_{t\to 0} t\frac{\left(\left(\frac{3}{5}\right)^4 + \left(-\frac{4}{5}\right)^4\right)}{\left(\left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(-\frac{4}{5}\right)^2\right)} + \frac{3}{5} = \frac{3}{5} \to d = \frac{3}{5}$$

La derivada direccional de $f(x,y)$ en el origen, en la dirección del vector $\vec{v} = \left(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right)$ es:

$$d = \frac{3}{5}$$

c. Diferenciabilidad:

La manera de justificar la diferenciabilidad de una función es aplicando definición. Sabemos que una función será diferenciable si se cumple el siguiente límite:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\left(f(x,y) - f(\bar{x},\bar{y}) - \langle \nabla f(\bar{x},\bar{y}), \begin{pmatrix} x-\bar{x} \\ y-\bar{y} \end{pmatrix} \rangle\right)}{\|(x,y)-(\bar{x},\bar{y})\|} = 0$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\left(\frac{x^4+y^4}{x^2+y^2} + x - 0 - \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x-0 \\ y-0 \end{pmatrix} \rangle\right)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\left(\frac{x^4+y^4}{x^2+y^2} + x - x\right)}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\left(\frac{x^4+y^4}{x^2+y^2}\right)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4+y^4}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}$$

Utilizamos rectas de la forma $y = mx$:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4+y^4}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y=mx)\to(0,0)} \frac{x^4+(mx)^4}{(x^2+(mx)^2)\sqrt{x^2+(mx)^2}}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x^4+(mx)^4}{(x^2+(mx)^2)\sqrt{x^2+(mx)^2}} = \lim_{x\to 0} \frac{x^4(1+(m)^4)}{(x^2(1+(m)^2))|x|\sqrt{1+(m)^2}}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x^4(1+(m)^4)}{\left(x^2(1+(m)^2)\right)|x|\sqrt{1+(m)^2}} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2(1+(m)^4)}{|x|(1+(m)^2)\sqrt{1+(m)^2}}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{|x|(1+(m)^4)}{(1+(m)^2)\sqrt{1+(m)^2}} = 0$$

Nos queda que $L = 0$ es un posible valor de límite. Ahora vamos a demostrarlo.

Buscamos acotar en un $\beta_r(0,0) \equiv \sqrt{x^2+y^2} < r$. Analizamos:

$$|G(x,y) - L| = \left| \frac{x^4+y^4}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}} - 0 \right| = \left| \frac{x^4+y^4}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}} \right|$$

Por desigualdad triangular:

$$\left| \frac{x^4+y^4}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}} \right| \leq \left| \frac{x^4}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}} \right| + \left| \frac{y^4}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}} \right|$$

$$= \left| \frac{x^4}{(x^2+y^2)} \right| \left| \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \right| + \left| \frac{y^4}{(x^2+y^2)} \right| \left| \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \right|$$

Tenemos que:

$$\sqrt{x^2+y^2} < r \to x^2+y^2 < r^2 \to x^2 < x^2+y^2 < r^2 \to |x| < r$$

$$\sqrt{x^2+y^2} < r \to x^2+y^2 < r^2 \to y^2 < x^2+y^2 < r^2 \to |y| < r$$

De:

$$x^2 < x^2+y^2 \to \frac{1}{x^2} > \frac{1}{x^2+y^2} \to \frac{x^4}{x^2} > \frac{x^4}{x^2+y^2} \to x^2 > \frac{x^4}{x^2+y^2}$$

$$y^2 < x^2+y^2 \to \frac{1}{y^2} > \frac{1}{x^2+y^2} \to \frac{y^4}{y^2} > \frac{x^4}{x^2+y^2} \to y^2 > \frac{x^4}{x^2+y^2}$$

Entonces:

$$\left| \frac{x^4}{(x^2+y^2)} \right| \left| \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \right| + \left| \frac{y^4}{(x^2+y^2)} \right| \left| \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \right| \leq |x^2| \left| \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \right| + |y^2| \left| \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \right|$$

Finalmente:

$$|x^2|\left|\frac{1}{x}\right| + |y^2|\left|\frac{1}{y}\right| = |x| + |y| \leq 2r \rightarrow r < \frac{\varepsilon}{2}$$

Basta tomar un $\beta_r(0,0)$ de radio $r < \frac{\varepsilon}{2}$ para que el límite exista y valga $L = 0$.

Luego:

$$f(x,y) \text{ es diferenciable en } (0,0)$$

NOTA: *Si usted hubiese decidido demostrar primero la diferenciabilidad (OJO, SIEMPRE QUE DEMOSTRARA PRIMERO LA DIFERENCIABILIDAD) pudo haber calculado la derivada direccional mediante la forma mecánica:*

$$d = \langle \nabla f(\bar{x},\bar{y}), \vec{v} \rangle \rightarrow d = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{3}{5} \\ -\frac{4}{5} \end{pmatrix} \rangle \rightarrow d = \frac{3}{5}$$

Donde claramente obtenemos el mismo resultado que al aplicar la definición.

2. Suponga que la ecuación:

$$\boldsymbol{y^2 z cos(x) + x^2 e^z + x = 1}$$

Define implícitamente a la variable z como función de las otras, digamos $z = f(x,y)$. Sea g la función definida como $g(u,v) = (u + v^2, u^2 + v + 1)$. Obtenga la ecuación del plano tangente a la gráfica de la función compuesta $f \circ g$ en el punto $(0,0)$.

Solución:

Identificamos que estamos en presencia de una mezcla de derivación implícita con regla de la cadena. Definimos una función $h(u,v)$ que será nuestra función compuesta $h(u,v) = f(g(u,v))$.

Nos piden el plano tangente a la gráfica de h en $(0,0)$. Esta ecuación está dada por:

$$w - h(0,0) = \langle \nabla h(0,0), \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \rangle$$

Necesitamos $\nabla h(0,0)$ y $h(0,0)$.

Por composición:

$$h(0,0) = f\big(g(0,0)\big)$$

Evaluamos $g(u,v)$ en $(0,0)$ y obtenemos:

$$g(u,v) = (u + v^2, u^2 + v + 1) \rightarrow g(0,0) = (0,1)$$

Entonces:

$$h(0,0) = f(0,1)$$

Nuestro problema se traduce en calcular $f(0,1)$ y $\nabla h(0,0)$:

Veamos. Por regla de la cadena:

$$h(u,v) = f\big(g(u,v)\big) \rightarrow Dh(0,0) = Df(0,1)Dg(0,0)$$

Donde $Dh(0,0)$ es lo que buscamos, $Dg(0,0)$ lo podemos calcular y $Df(0,1)$ lo hallamos por derivación implícita. Esto es:

$$(u,v) = (u + v^2, u^2 + v + 1) \rightarrow Dg(u,v) = \begin{bmatrix} 1 & 2v \\ 2u & 1 \end{bmatrix} \rightarrow Dg(0,0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Para $Df(0,1)$ aplicamos derivación implícita, así:

$$[0 \quad 0] = DG(x,y,z) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) & \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) \end{bmatrix}$$

Donde $G(x,y,z) = y^2 z cos(x) + x^2 e^z + x - 1.$

$$DG(x,y,z) = \left[\frac{\partial G}{\partial x}(x,y,z) \quad \frac{\partial G}{\partial y}(x,y,z) \quad \frac{\partial G}{\partial z}(x,y,z)\right]$$

$$\rightarrow [-sen(x)zy^2 + 2xe^z + 1 \quad 2yzcos(x) \quad y^2\cos(x) + x^2 e^z]$$

Entonces:

$$[0 \quad 0] = [-sen(x)zy^2 + 2xe^z + 1 \quad 2yzcos(x) \quad y^2\cos(x) + x^2e^z]\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \end{bmatrix}$$

De donde obtenemos:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{-(-sen(x)zy^2 + 2xe^z + 1)}{y^2\cos(x) + x^2e^z} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{-2yzcos(x)}{y^2\cos(x) + x^2e^z}$$

Evaluamos en (0,1):

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,1) = -1 \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0,1) = -2z$$

Falta conseguir el valor de z, que se obtiene de evaluar en la ecuación:

$$y^2zcos(x) + x^2e^z + x = 1 \to z = 1$$

Luego:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,1) = -1 \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0,1) = -2 \to Df(0,1) = [-1 \quad -2]$$

Ya tenemos todo para sustituir en la regla de la cadena:

$$Dh(0,0) = Df(0,1)Dg(0,0) \to Dh(0,0) = [-1 \quad -2]\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$Dh(0,0) = [-1 \quad -2]$$

Finalmente:

$$\nabla h(0,0) = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

La ecuación del plano nos queda:

$$w - h(0,0) = \langle \nabla h(0,0), \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \rangle \to w - f(0,1) = \langle \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \rangle \to w - f(0,1) = -u - 2v$$

Del enunciado tenemos que:

$$z = f(x,y) \rightarrow f(0,1) = z \rightarrow f(0,1) = 1$$

La ecuación del plano tangente a la gráfica de h en (0,0) es:

$$w - 1 = -u - 2v$$

$$\Rightarrow u + 2v + w = 1$$

3. Considere la función $f(x,y) = x^2 + y^2 - 2x^4$.

a. Obtenga y clasifique los puntos críticos de f.

b. Obtenga los extremos globales de f en el disco $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \middle| x^2 + y^2 \leq 1\}$.

Solución:

a. Puntos críticos y clasificación:

Los puntos críticos de f son todos aquellos que satisfacen la relación:

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Esto es:

$$\begin{pmatrix} 2x - 8x^3 \\ 2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow y = 0, \qquad 2x(1 - 4x^2) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ 1 - 4x^2 = 0 \quad \begin{cases} x = \dfrac{1}{2} \\ x = -\dfrac{1}{2} \end{cases} \end{cases}$$

Nuestros puntos críticos son:

$$A = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Para clasificarlos utilizamos el criterio de la segunda derivada que nos obliga a la determinación de la matriz Hessiana de $f(x,y)$:

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 2-24x^2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \det\left(H_f(x,y)\right) = 4-48x^2,\ h_{11}(x,y) = 2-24x^2$$

Entonces:

Para el punto A:

$$\det\left(H_f(x,y)\right) = 4-48x^2$$

$$\rightarrow \det\left(H_f(0,0)\right) = 4 > 0,\ h_{11}(x,y) = 2-24x^2 \rightarrow\ h_{11}(0,0) = 2 > 0$$

$$A \text{ es un mínimo local}$$

Para el punto B:

$$\det\left(H_f(x,y)\right) = 4-48x^2$$

$$\rightarrow \det\left(H_f\left(\frac{1}{2},0\right)\right) = -8 < 0$$

$$B \text{ es un punto silla}$$

Para el punto C:

$$\det\left(H_f(x,y)\right) = 4-48x^2$$

$$\rightarrow \det\left(H_f\left(-\frac{1}{2},0\right)\right) = -8 < 0$$

$$C \text{ es un punto silla}$$

b. Extremos globales de f en el disco $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x^2+y^2 \leq 1\}$

La elección del método para resolver esto es personal. Aquí lo haremos utilizando Multiplicadores de Lagrange:

$$\begin{cases} \nabla f(x,y) = \lambda \nabla g(x,y) \\ g(x,y) = 0 \end{cases}$$

Donde $g(x,y) = x^2+y^2-1$. Entonces:

$$\begin{cases} \nabla f(x,y) = \lambda \nabla g(x,y) \\ g(x,y) = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{matrix} \begin{pmatrix} 2x - 8x^3 \\ 2y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix} \\ x^2 + y^2 - 1 = 0 \end{matrix}$$

Queda un sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 2x - 8x^3 = \lambda 2x & (1) \\ 2y = \lambda 2y & (2) \\ x^2 + y^2 - 1 = 0 & (3) \end{cases}$$

De la ecuación (2) obtenemos:

$$\lambda = 1\ (a), y = 0 (b)$$

Sustituimos (a) en (1) y obtenemos los valores de x:

$$2x - 8x^3 = 2x \rightarrow -8x^3 = 0 \rightarrow x = 0$$

Sustituimos $x = 0$ en (3) y obtenemos los valores de y:

$$x^2 + y^2 - 1 = 0 \rightarrow y^2 - 1 \rightarrow y = \pm 1$$

Nos quedan los puntos:

$$D = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad E = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Sustituimos (b) en (3) y obtenemos los valores de x:

$$x^2 + y^2 - 1 = 0 \rightarrow x^2 - 1 = 0 \rightarrow x = \pm 1$$

Y $\lambda = 0$. Nos quedan los puntos:

$$F = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad G = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ahora, tenemos que evaluar los puntos D, E, F y G (además de los críticos de la parte (a) que pertenezcan a $x^2 + y^2 \leq 1$) y ver cuál es el máximo y mínimo global.

$$A, B, C, D\ y\ E\ \in \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 \leq 1\}$$

Evaluamos:

$$f(A) = 0$$

$$f(B) = \frac{1}{8}$$

$$f(C) = \frac{1}{8}$$

$$f(D) = 1$$

$$f(E) = 1$$

$$f(F) = -1$$

$$f(G) = -1$$

Entonces:

$$f(x, y) \text{ tiene un mínimo global en } F\ y\ G$$

$$f(x, y) \text{ tiene un máximo global en } D \text{ y } E$$

¡Fin!

Cualquier error, por favor, notifíquelo por las vías regulares.

Saúl Utrera